SUITES REÉLLES

EXERCICE 1. Démontrer que dans l'ensemble $\mathbb{R}$, on a $|x| \leq \alpha \Leftrightarrow -\alpha \leq x \leq \alpha$. En déduire que dans $\mathbb{R}$, on a toujours

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$
$$||x|-|y|| \leq |x-y|$$

EXERCICE 2. Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\alpha > 0$, un réel. On définit l'intervalle $I_{a,\alpha}$ par $I_{a,\alpha} =]a-\alpha, a+\alpha[$ si $a \in \mathbb{R}$, $I_{a,\alpha} =]-\infty, -\alpha[$ si $a = -\infty$ et $I_{a,\alpha} =]\alpha, +\infty[$ si $a = +\infty$. Montrer que

$$x \in I_{a,\alpha} \Leftrightarrow |x-a| < \alpha \quad \text{si } a \in \mathbb{R}$$
$$x \in I_{-\infty,\alpha} \Leftrightarrow x < -\alpha$$
$$x \in I_{+\infty,\alpha} \Leftrightarrow x > \alpha$$

EXERCICE 3. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ ayant un majorant M. Démontrer que

$$M = \sup A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, M - \varepsilon < x$$

EXERCICE 4. Soit $A = \{ \frac{1}{n} + (-1)^n / n \in \mathbb{N}^* \}$.

a. Montrer que A admet une borne inférieure et une borne supérieure.

b. Déterminer $\inf A$ et $\sup A$.

EXERCICE 5. Soient a et b des réels et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p$$
$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)(a^n + a^{n-1}b + \dots + ab^{n-1} + b^n)$$

La première formule est appelée formule du binôme.

EXERCICE 6. Démontrer à l'aide de la définition que

1 est une limite de $u_n = 1 - \frac{1}{n}$

$+\infty$ est une limite de $u_n = 5n^2$

$+\infty$ est une limite de $u_n = r^n$, $r > 1$

-1 n'est pas une limite de $u_n = (-1)^n$

$+\infty$ n'est pas une limite de $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$

EXERCICE 7. Démontrer que la suite définie par

$$u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$$

n'est pas convergente.



EXERCICE 8. Démontrer que la suite

$$u_n = \frac{1}{1+2^0} + \cdots + \frac{1}{1+2^n}$$

est de Cauchy.

EXERCICE 9. On considère la suite $u_n = 1 + \cdots + \frac{1}{n}$.

a. Montrer que $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$.

b. Montrer que la suite u n'est pas convergente.

EXERCICE 10. Soit la suite définie par

$$u_n = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

a. Montrer que $2u_{2n} \leq u_n + 1/\sqrt{n}$.

b. Montrer que u est convergente.

c. Déterminer la limite de la suite u.

EXERCICE 11. Soit u une suite réelle.

a. Soit $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que si les suites extraites $u_{2n} \to l$ et $u_{2n+1} \to l$ alors la suite $u \to l$.

b. On prend $u_n = 1/n^2 + (-1)^n n$.

i. Donner $\lim u_{2n}$ et $\lim u_{2n+1}$.

ii. Montrer que u est convergente et donner sa limite.

c. On considère la suite $u_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

i. Montrer que les suites extraites u_{2n} et u_{2n+1} sont adjacentes.

ii. Montrer que u est convergente.

EXERCICE 12. On considère les fonctions $f(x) = 4x+5/x+3$ et $g(x) = (1-x)^2$.

a. Montrer que f est croissante sur $I = [0,4]$ et g est décroissante sur $J = [0,1]$. En déduire que $f(I) \subset I$ et que $g(J) \subset J$.

b. On définit la suite u par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que u est convergente et calculer sa limite.

c. On définit la suite z par $z_0 = \frac{1}{2}$ et $z_{n+1} = g(z_n)$.

i. On considère la suite extraite v définie par $v_n = z_{2n}$. Montrer qu'il existe une fonction F croissante sur J telle que $F(J) \subset J$ et $v_n = F(v_{n+1})$. Montrer que v est convergente et calculer sa limite.

ii. On considère la suite extraite w définie par $w_n = z_{2n+1}$. Montrer que $w_{n+1} = F(w_n)$. Montrer que w est convergente et calculer sa limite.

iii. Montrer que la suite u est divergente.




ETUSUP.com